$\boxed{\textit{Mathématiques TS : la dernière ligne droite}}$ [1]

ATOUT-MATH

♠ Quelques incontournables sur les suites :

Critères de Convergence (ils permettent de prouver l'existence de la limite et donc l'unicité mais pas d'en donner la valeur ; ces théorèmes ne sont pas explicites) :

- Si la suite est **croissante** et **majorée** par un réel M , elle **converge** vers un réel l tel que $l \leq M$.

Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

- Si la suite est **décroissante** et **minorée** par un réel m, elle **converge** vers un réel l tel que $l \geq m$.

Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

- Vous pouvez aussi vous trouver en présence dans un exercice de deux suites (u_n) et (v_n) "combinées" et dont on souhaite étudier de manière quasi-simultanée le comportement (monotonie, convergence éventuelle). L'exercice en général se déroule comme suit.

On montre par récurrence par exemple qu'une de deux suites, disons (u_n), est croissante. Elle est donc en particulier minorée par son premier terme u_0.

On prouve ensuite que la suite (v_n) est décroissante et par conséquent majorée par son premier terme v_0. En outre, on montre que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n$. On en déduit alors :

$$\forall\, n \,\in\, \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Interprétation : La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge donc vers un réel l.

Quant à la suite (v_n), elle est décroissante et minorée par u_0, elle converge donc vers un réel l'.

La fin de l'exercice a alors pour but de vous permettre de prouver que l= l'.

Culture : Un tel couple de suites est qualifié de "suites adjacentes." Cette notion a pour le moment disparu du programme mais il est tout à fait envisageable que l'on vous fasse travailler avec un couple de suites adjacentes

[1] Vous pouvez envoyer vos nombreux et généreux dons à l'association "Sauver Karen" des nouveaux programmes et des élèves toujours plus nombreux à ne pas travailler nuit et jour ...
karen.brandin@orange.fr

sans le dire, en vous guidant pas à pas *(cf par exemple l'exercice sur les suites numériques de Nouvelle-Calédonie Novembre* 2013.*)*

- Une suite (u_n) est dite **divergente** lorsque $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \infty$ OU lorsque $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$ n'existe pas
(c'est le cas par exemple de la suite alternée de terme général : $(-1)^n$.)
Même si certains parmi vous sont tentés de crier à l'imposture, une suite est divergente lorsqu'elle ne converge pas !
Moralité, n'assimilez pas "diverger" pour une suite numérique avec " tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$" cela pourrait vous être fatal en cas de "Vrai/Faux" notamment.

Calcul de la limite :

- Si la suite admet un terme général du type $u_n = f(n)$ (on dit alors qu'elle est définie de manière *explicite*, par exemple : $u_n = \dfrac{3n^2 - 4n + 12}{n+1}$), on rappelle que la suite u hérite des propriétés de la fonction f dont elle est extraite (la réciproque est bien entendu FAUSSE). Pour étudier les variations de u, il faut et il suffit d'étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}(f(n)).$$

- Un critère utile (cf suites géométriques) :

$$\lim_{n\to+\infty}(q^n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < q < 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad q > 1.$$

Cette propriété, conséquence de l'inégalité de Bernoulli, est à l'origine d'une question ROC.

- Si la suite est *récurrente*, c'est-à-dire donnée par un terme initial et une relation de récurrence d'ordre 1, ie du type $u_{n+1} = f(u_n)$ alors si l existe, l est solution de l'équation $f(x) = x$.
Vous pouvez être amenés à retrouver cette propriété en passant "à la limite" dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$; je vous rappelle que les arguments sont de deux natures : la **continuité** de la fonction f et l'**unicité** de la limite.

Cette propriété peut aussi vous permettre de mener à bien un raisonnement par l'absurde destiné à prouver que la suite est divergente en prouvant que si la suite convergeait, elle tendrait vers un réel l solution de $f(x) = x$ incompatible avec la définition de la suite ou de l'énoncé.

Vous devez en outre impérativement savoir conjecturer la valeur de la limite (ainsi que la monotonie) sur le dessin consacré. NE PAS OUBLIER DE TRACER LA DROITE D'ÉQUATION $y = x$ qui sert de "rabatteur".

- Penser au théorème des Gendarmes et au théorème de comparaison qui peuvent permettre de conclure une fois un encadrement établi. Attention à ne pas les confondre bien sûr !

Monotonie d'une suite numérique :

- Dans le cas général, on forme, pour tout n raisonnable, la différence $u_{n+1} - u_n$ et on en étudie le signe. Il est possible que pour ce faire, vous soyez amenés à résoudre une équation du second degré après avoir posé le changement de variable : $X = u_n$.

Éduquer votre oeil pour reconnaître les enventuelles identités remarquables, vous gagnerez un temps peut-être précieux le jour du bac.

- Si la suite est récurrente c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, penser à utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer pour tout entier n la propriété P_n : "$u_n \leq u_{n+1}$" pour montrer qu'elle est croissante ou décroissante si vous avez conjecturé qu'elle est décroissante bien sûr.

Prouver l'hérédité dans ce cas est automatique en terminale en tous cas *en général*. Pas besoin de reconstruire forcément car il suffit d'appliquer la fonction f à l'ensemble des termes de l'inégalité, *fonction dont vous aurez prouvé dans une première partie qu'elle est croissante sur un intervalle I qui contient tous les termes de la suite*. Les textes sont faits pour vous aider, n'en doutez jamais mais il faut savoir les exploiter, c'est-à-dire FAIRE LES LIENS ENTRE LES QUESTIONS !!!

On utilise souvent le dessin cité plus haut pour CONJECTURER (**sans calculs**) la monotonie de la suite en question.

La mode est aussi aux extraits plus ou moins pertinents de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un algorithme adapté.

Dans tous les cas, rappelez-vous que vous ne pouvez JAMAIS affirmer qu'une suite est croissante ou décroissante après avoir ordonné un nombre FINI de termes. Vous pouvez alors simplement émettre une conjecture qu'il faudra prouver par la suite.

On NE dresse bien entendu PAS le tableau de variations d'une suite comme on le ferait dans le cas des fonctions numériques à variable réelle car le monde des suites est DISCRET (ie que les antédécents sont des entiers naturels et entre deux entiers naturels consécutifs, il y a un trou ...), on fait une phrase!!! sachant qu'une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un rang n_0 à déterminer. Dès la 1S, vous avez rencontré des suites croissantes à partir du rang 3 par exemple.

- Une suite est constante si et seulement si,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$$

ou bien, de manière équivalente, $u_{n+1} - u_n = 0$. Une suite constante est évidemment convergente; elle converge vers u_0 par exemple (si u_0 existe bien sûr).

En terme de somme, si l'on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_0 \\ &= (n+1)u_0 \end{aligned}$$

♣ *Conséquence* :

Une suite *croissante* est *minorée par son premier terme*; une suite *décroissante* est *majorée par son premier terme.* Cela peut aider à montrer qu'une suite est bornée par exemple.
Des exemples classiques de termes généraux de suites "naturellement" bornées :

$$(\cos n)\ ;\ (\sin n)\ ;\ \ (-1)^n.$$

Suites Particulières :

♠ Pour montrer qu'une suite u est arithmétique, il faut et il suffit de prouver qu'il existe un réel r non nul tel que :

$$\forall\, n\ \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r.$$

Là encore, le calcul des premiers termes ne saurait permettre *d'affirmer* qu'une suite est arithmétique mais permettrait simplement de le *conjecturer* (ainsi que la valeur de sa raison).
Contrairement à la monotonie, une suite ne devient pas arithmétique à partir d'un rang n_0, elle l'est ou pas dès le départ si l'on peut dire. C'est une propriété *intrinsèque.*
Si $r = 0$, il s'agit d'une suite constante ...

Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend donc simplement du signe de sa raison r (tout comme sa limite ...) ! C'est naturel car elles sont extraites des fonctions affines !
Graphiquement on est amenés à conjecturer qu'une suite est arithmétique lorsque le nuage de points associé est constitué de points alignés.

Terme général ou encore expression de u_n en fonction de n : si la suite est définie sur $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Si en revanche la suite n'est définie qu'à partir du rang $k \geq 0$,

$$u_n = u_k + (n-k)r.$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Plus généralement : $S = (\text{nombre de termes})\left(\dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$

Cas particulier important : *Somme des n premiers entiers*

$$1 + 2 + 3 + +n = \frac{n(n+1)}{2}$$

♠ Pour montrer qu'une suite v est géométrique, il faut et il suffit de prouver qu'il existe un réel q non nul tel que :

$$\forall\, n \ \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = q \times v_n.$$

Remarque : Lorsque $q = 1$, la suite est constante !

Le sens de variation d'une suite *géométrique* dépend du signe de son premier terme et de la position de la raison q par rapport à 1.
À revoir si vous avez un doute quant à l'énoncé.

Terme général : si la suite est définie sur $\mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n.$$

Si en revanche la suite n'est définie qu'à partir du rang $k \geq 0$,

$$v_n = v_k \times q^{n-k}.$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} v_k \\ &= v_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) \end{aligned}$$

Plus généralement : $S =$ (premier terme) $\left(\frac{\text{1-(raison)}^{\textit{nombre de termes}}}{1 - raison} \right)$

Bien entendu, la plupart des suites numériques ne sont ni arithmétiques, ni géométriques ce serait trop beau ou trop ennuyeux !
De très nombreux exercices (ceux alliant probabilités discrètes et suites notamment ou de petits problèmes concrets) utilisent des suites aritméticogéométriques qui sont des suites récurrentes caractérisées par une relation de récurrence de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b désignent deux réels non-nuls. On étudie ces suites en faisant intervenir une suite auxiliaire en général géométrique (plus rarement arithmétique) qu'au lycée on ne vous demandera pas de construire mais simplement de savoir exploiter.

L'exercice 2 de l'épreuve de Pondichéry 2015 lève un coin de voile concernant la construction de cette suite auxiliaire ; sa résolution devrait vous permettre de construire vous-mêmes des exercices. Trop stylé. ;-)

Moralité : on essaie toujours de se ramener à ce que l'on sait faire en particulier pour les calculs de sommes.

♡ Un grand classique - Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ où $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 5 - 4n$.

La stratégie dans ce cas est de découper la suite u en deux suites v et w où v est géométrique de premier terme $v_0 = -3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ et w est arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -4$.

La linéarité du symbole Σ permet alors de **scinder la somme en deux sommes "faciles"** car connues :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Enfin, lorsqu'il s'agit d'exhiber des contre-exemples (exercices du type Vrai ou Faux souvent redoutables), la suite alternée de terme général $((-1)^n)$ est souvent de bon conseil (contrairement à l'intuition ou au hasard).

Limites de fonctions :

Outil Fondamental : les résultats de croissances comparées.

Je vous rappelle les "quatre piliers" ou les quatre formes indéterminées :

$$\boxed{\infty - \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad 0 \times \infty}$$

Si problème (F.I.) en $+\infty$ avec Exp, essayer de faire apparaitre :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty$$

ou de manière équivalente :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0$$

Si problème en $-\infty$ avec Exp, essayer de faire apparaitre :

$$\lim_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$$

Si problème en $+\infty$ avec ln, essayer de faire apparaitre :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

Si problème en 0^+ avec ln, essayer de faire apparaitre :

$$\lim_{x \to 0} (x \ln x) = 0$$

Pour cela, on développe ou l'on factorise (même de force) selon les cas.

Autres outils : les théorèmes des gendarmes/de comparaison ou encore (même s'il s'agit d'une technique plus marginale) la mise en évidence d'un taux d'accroissement associée à une foncton dérivable, c'est à dire d'une expression de la forme :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En effet, on rappelle que si f est dérivable en a, alors

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f'(a).$$

Application (ROC) :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)=1.$$

♣ *Savoir en déduire les éventuelles conséquences graphiques en termes de droites asymptotes.*
Réciproquement, si l'on vous demande de justifier qu'une courbe admet une droite asymptote, vous devez comprendre que l'on vous demande de déterminer une ou les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition, ensemble que vous devez être capables de déterminer.

♣ Attention aux pièges et réflexes malheureux ...

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=1$$

entraine que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote oblique (**hors programme a priori)** à la courbe associée à f ! En effet les opérations sur les limites entrainent :

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x-1)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}(f(x)-(x+1))=0$$

Cela n'entraine absolument pas par exemple que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$! !

Compléments :

Pour étudier la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ l'une par rapport à l'autre sur un intervalle I donné, on étudie le signe de la différence $f(x)-g(x)$. Il peut être nécessaire de dresser un tableau de signes. Attention aux conclusions précipitées.
C'est une question qui apparait de plus en plus fréquemment dans les sujets après avoir longtemps été abandonnée. Elle prend tout son sens lorsqu'is'agit dans la suite du problème d'étudier sur un intervalle donné, l'aire située entre les deux courbes. Si la problème est ardu, il peut nécessiter de poser $h(x) = f(x) - g(x)$ la fonction différence, d'étudier les variations de h sur un intervalle précisé pour en déterminer finalement le signe.
Ce n'est pas la méthode la plus naturelle mais les variations d'une fonction peuvent renseigner sur le signe de cette dernière.

Je ne vous fais pas l'affront de vous rappeler l'équation générale d'une tangente (supposée non verticale) à une courbe $\mathcal{C}_f$ en un point $A(a; f(a))$. Et puis si, on est jamais trop prudents, surtout avec vous ;-) ... :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

En particulier, $\mathcal{C}_f$ admet une *tangente horizontale* en $A(a; f(a))$ ssi $f'(a) = 0$.

Même si c'est assez peu fréquent en terminale S, on peut bien sûr vous demander de lire graphiquement un nombre dérivé ; je vous rappelle que $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la droite tangente T_a au point d'abscisse a.
Si $E(x_E; y_E)$ et $F(x_F; y_F)$ désignent deux points de T_a, on a alors :

$$f'(a) = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$$

Dans le même ordre d'idée, une fonction admet un extremum local en $x = \alpha$ ssi la dérivée s'annule en α **ET** change de signe autour (au voisinage) de cette valeur. En particulier, montrer qu'une fonction admet *un maximum ou un minimum local ou global* suppose que l'on en ait préalablement étudié les variations.

Pour montrer qu'une fonction f supposée dérivable est constante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, il faut et il suffit de prouver que pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

Éléments de symétrie :

Une fonction f est ***paire*** ssi pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$. Dans ce cas, sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
Les prototypes de fonctions paires sont : la fonction "carrée", la fonction "cosinus", la fonction "valeur absolue" et vue cette année seulement, la fonction densité associée à la loi normale centrée réduite.

Une fonction f est ***impaire*** ssi pour tout $x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$. . Dans ce cas, sa représentation graphique admet l'origine O du repère pour centre de symétrie.
Idem, quelques stars incontournables : les fonctions "inverse", "cube", "sinus," "tangente."

Une fonction f admet le point I$(a; b)$ pour centre de symétrie ssi $\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in \mathcal{D}_f$ et $a - h \in \mathcal{D}_f$:

$$f(a+h) + f(a-h) = 2b.$$

Théorème des Valeurs Intermédiaires et extensions :

Je rappelle que le *théorème des valeurs intermédiaires* permet de démontrer l'existence d'une (au moins) solution d'une équation du type $f(x) = k$

avec f une fonction continue sur I et k un ***RÉEL***.
C'est donc un théorème d'**existence** (et d'**unicité** si l'on adjoint pour f l'hypothèse de *stricte monotonie* sur I) ; il a cette faiblesse de ne pas donner explicitement la ou les valeurs des antécédents de k par f. La méthode de balayage vous permet d'en obtenir une valeur approchée à la calculatrice avec une précision à ajuster suivant les exigences de l'énoncé. Vous devez aussi être familiarisés (ées) avec l'algorithme de dichotomie.
Il peut arriver (en général vous serez guidés(ées)) que l'on vous demande de l'employer de manière détournée, c'est à dire dans le but de prouver qu'une fonction f admet sur un intervalle I non-vide "un point fixe" autrement dit une solution de l'équation $f(x) = x$.
On se ramène naturellement au contexte d'aplication du théorème en posant $g : x \mapsto g(x) = f(x) - x$; en effet, discuter le nombre de solutions de $f(x) = x$ équivaut à discuter celui de $g(x) = 0$ (cf épreuve de maths de Sciences-Po Paris 2015 par exemple).

Bien entendu, on évite ce théorème lorsque l'on dispose des outils pour résoudre explicitement l'équation $f(x) = k$ (je pense à une assertion du sujet de Liban 2016.) En revanche (cf exercice 2, Amérique du Nord 2016), lorsqu'il est impossible de déterminer explicitement les antécédents éventuels d'un réel k, on les "traque" via un TVI ou son corollaire (parfois appelé *"théorème de la bijection"*).

Dérivées- Primitives-Calcul Intégral :

- Bien connaitre son tableau des dérivées usuelles (savoir reconnaître en particulier une expression de la forme : $u'(x)e^{u(x)}$ qui se "relève" en $e^{u(x)}$, $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui se "relève" en $\ln(\mid u(x) \mid)$ et enfin $u'(x) \times u(x)$ qui se "relève" en $\dfrac{1}{2}(u(x))^2$

Les classiques :

$$\frac{\ln x}{x} = \ln x \times \frac{1}{x} = u'(x) \times u(x)$$

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

- En TS comme en TES, il est de plus en plus fréquent que l'on demande simplement de vous assurer qu'une fonction F donnée est une primitive d'une fonction f (supposée continue sur un intervalle I). Dans ce cas, on attend simplement de vous que vous prouviez que :

$$\forall\, x \in\ I, F'(x) = f(x).$$

- Vous devez aussi savoir dériver une fonction composée "formelle" en utilisant la relation :

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \times u'(x).$$

- À mémoriser $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-u'(x)}{u(x)}$.

De la même façon, si vous ne connaissez plus les deux expressions possibles de $\tan'(x)$, $(x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[)$ retrouvez-les en dérivant le quotient : $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ et vérifez que :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x.}$$

Rappel : La dérivée de $\dfrac{1}{x}$ est égale à $-\dfrac{1}{x^2}$ et celle de son analogue $\dfrac{1}{u(x)}$ est donnée par : $-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$. Se tromper sur ces formules serait du plus mauvais goût ! ! ! Pensez à ma réputation ... et à mon avenir de plus en plus compromis je le crains ...

- **Autre astuce** (décomposition en éléments simples avec initiative ; c'est rare heureusement ...) - Par exemple , pour $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= \frac{x+1-1}{x+1} \\ &= \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \\ &= 1 - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

puis on "intègre" **chaque** morceau.

- Enfin, si f est définie, continue sur $[-a; a]$ et PAIRE alors :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$$

Si f est définie, continue sur $[-a; a]$ et IMPAIRE : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

- Sinon (mais c'est l'ultime recours en TS quoique désormais **HORS PROGRAMME**) on intègre par parties sur un intervalle $I = [a; b]$ avec

u et v **dérivables à dérivées continues** sur I sans se tromper de candidats pour $u(x)$ et $v'(x)$ (ou le contraire suivant vos notations). En général, on dérive la partie polynômiale pour en faire baisser le degré. Si vous vous trompez de couple, l'intégrale que vous allez obtenir sera au moins aussi innaccessible que l'intégrale initiale. Retour à la case départ.
Ce n'est pas dramatique mais cela vous fera perdre du temps et risque en outre de vous destabiliser.

- ***Application*** :

La technique d'intégration par parties permet souvent de mettre en évidence une relation de récurrence, c'est à dire un lien entre deux intégrales I_n et I_{n+1}.

Un calcul d'intégrale est souvent (c'est la raison d'être de cet outil) associé au calcul de l'aire d'un domaine du plan (plus rarement du volume d'un solide de révolution) essentiellement pathologique au sens où il ne s'agit en général pas d'un rectangle, trapèze etc... puisque dans ces cas simples on dispose de formules héritées du collège (ou du dictionnaire ou malheureusement de la calculatrice si l'on a un trou de mémoire et pas elle) ...
Il faut savoir décrire ce dernier par une phrase (et le hachurer sur le graphe si besoin.

À l'inverse, si le domaine est décrit en français, il faut savoir écrire l'intégrale corrrespondante.
Attention de prendre en compte les positions relatives des deux courbes délimitant le domaine sur l'intervalle d'intégration.

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

si $\mathcal{C}_f$ **est située au-dessus de** $\mathcal{C}_g$ sur $[a;b]$.

♣ Revoir les formules donnant l'aire d'un triangle $\dfrac{B \times h}{2}$, d'un trapèze $\dfrac{(B+b)\times h}{2}$ qui peuvent s'inviter (le dernier exemple en date est très récent : Amérique du Nord 2016.
Reconnaissez que ce serait quand même humiliant de louper une question du bac S parce qu'on ne connaît pas/plus l'aire d'un trapèze. Laissez parler votre amour propre que diable !

Remarque : On peut estimer la valeur approchée d'une intégrale grâce au dessin en "comptant" des carreaux .... Il faut avoir présent à l'esprit que le calcul de primitives est **artificiel**.
Prédire l'existence de primitives est souvent simple (il suffit que la fonction

soit continue sur l'intervalle en question) mais les exhiber est une autre paire de manches.
Dans le sujet d'Amérique du Nord 2016 décidément riche en rebondissements, on vous propose de faire une première estimation d'une surface en la "coinçant" entre un triangle et un trapèze.

- *Penser à la relation de Chasles* ... pour regrouper ou au contraire "éclater" une intégrale.

Chasles (ou plutôt sa relation) s'invite dans les exercices mêlant "intégrales et suites" lorsque la dépendance en n se situe dans la borne.
Par exemple :

$$I_n = \int_0^n \sqrt{1+t}\, dt.$$

Déterminer le sens de variation de la suite revient en effet à évaluer le signe de $I_{n+1} - I_n$ pour n entier naturel. On a alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt - \int_0^n \sqrt{1+t}\, dt \\ &= \int_0^n \sqrt{1+t}\, dt + \int_n^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt - \int_0^n \sqrt{1+t}\, dt \\ &= \int_n^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt. \end{aligned}$$

- *Autre point de vue* toujours avec Michel Chasles à la barre et les propriétés de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt - \int_0^n \sqrt{1+t}\, dt \\ &= \int_0^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt + \int_n^0 \sqrt{1+t}\, dt \\ &= \int_n^0 \sqrt{1+t}\, dt + \int_0^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt \\ &= \int_n^{n+1} \sqrt{1+t}\, dt. \end{aligned}$$

On conclut en invoquant un argument de "positivité" de l'intégrale (cf ci-dessous) ...

- Attention à la formule de la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a;b]$ que l'on ne vous rappelera pas forcément :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

- Si l'on vous demande de parler du signe d'une intégrale, penser au théorème de positivité de l'intégrale car il s'agit du seul outil en votre possession pour conclure (attention les bornes doivent être rangées du bas vers le haut dans *L'ORDRE CROISSANT*).

- Il est fréquent que l'on vous demande **d'encadrer** une intégrale sur un intervalle $[a, b]$, dans ce cas voici l'outil à utiliser :

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

ATTENTION, il s'agit d'une implication **ET NON** d'une équivalence (vous pouvez montrer que la réciproque est fausse en exhbant un contre-exemple). Les fonctions affines sont de bon conseil par exemple.
Moralité, vous déterminer un encadrement de $f(x)$ sur $[a, b]$ puis vous en intégrer chaque membre sans tricher, sans brûler d'étapes.

♡ ***Fonction définie par une intégrale*** :

Par définition $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ désigne l'unique primitive de f s'annulant en a. Le théorème fondamental de l'intégration permet d'affirmer que F est dérivable sur $I = [a; \infty[$ et pour tout x on a $F'(x) = f(x)$.
Le signe de $f(x)$ sur I permet donc de déterminer les variations de F sur I.

- ***Exponentielle de base a*** > 0 : **Hors Programme** pour le moment

Il s'agit des fonctions définies par $x \mapsto a^x$. La seule chose que vous devez impérativement savoir, c'est que signifie cette écriture à savoir :

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Ainsi, qu'il s'agisse de dériver ou de déterminer une limite d'une fonction de ce type, on se ramène naturellement à une expression de la forme $e^{u(x)}$ où $u(x) = x \ln a \quad (\rightsquigarrow u'(x) = \ln a)$.

♡ Concernant les deux fonctions "Star" de la terminale, *l'Exponentielle de base e* (où $e = 2,718$ à 10^{-3} près) et *le logarithme de base e* ou encore "népérien", il n'y a rien à redouter. Il faut en revanche connaitre parfaitement les cartes d'identité de ces deux protagonistes ainsi qu'une allure de leurs courbes représentatives respectives. L'idéal serait que VOUS connaissiez parfaitement ces fonctions car je suis convaincue que votre calculatrice a, quant à elle, tout en ... mémoire, c'est le cas de le dire (et l'occasion de le regretter) !

♦ Pour "Exp", soit vous serez confrontés soit à la fonction brute $x \mapsto e^x$ soit plus sûrement à une fonction composée : $x \mapsto e^{u(x)}$ qui est définie et dérivable pourtout où u l'est.
De plus, pour tout x du domaine de dérivabilité de u, on a :

$$(e^u)'(x) = e^{u(x)} \times u'(x).$$

♦ Pour "ln", idem ; soit vous serez confrontés soit à la fonction brute $x \mapsto \ln(x)$ soit plus sûrement à une fonction composée :

$$\ln \circ u : x \mapsto \ln(u(x))$$

.
J'ose à peine vous rappeler que $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ signifie $\ln\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ ... (c'est l'expérience qui parle) !

En revanche, le domaine de défintion de $\ln \circ u$ est plus délicat à déterminer que précédemment *car il faut tenir compte de deux conditions d'existence* à savoir $x \in \mathcal{D}_u$ et $(x) > 0$ (car ln a ses exigences ...). De plus, pour tout x du domaine de dérivabilité, on a :

$$(\ln \circ u)'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x).$$

★ Enfin, attention aux pièges classiques et déshonorants pour des professionnels tels que vous : $\ln 3$ par exemple est un nombre réel, sa dérivée est nulle ; idem pour e^4 (toujours par exemple).
Dans le même esprit, la fonction $f : x \mapsto ex + \ln 6$ est une fonction **affine** ; elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e$. Sa représentation graphique est une droite de coefficient directeur e et d'ordonnée à l'origine $\ln 6$.
Pensez enfin que le monde n'est pas idéal et que le nombre $\ln x$ change de signe autour de la valeur 1. Attention donc lorsque vous multipliez ou divisez dans une inégalité.

Probabilités : entre discrétion et continuité :

Le modèle DISCRET au programme (c'est-à-dire que la variable aléatoire X prend des valeurs isolées parcourant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels) est la loi binomiale.

Il faut savoir reconnaître le contexte d'un schéma de Bernoulli et donner les arguments susceptibles de convaincre le correcteur que votre choix n'est pas dû au hasard !

Une rédaction possible est : "*On répète n fois dans de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire une épreuve à deux issues exactement (succès et échec) de succès à préciser !*
On reconnaît un schéma de Bernoulli de paramètres $n =?$ et $p =?$ où je rappelle que l'on désigne par p la probabilité de l'évènement considéré comme représentant le succès.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès ; X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
La probabilité d'obtenir exactement k succès parmi les n épreuves est alors donnée par :

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

Dans ce cas particulier, la formule de l'espérance se simplifie et $E(X) = np$ qui vient se substituer au classique (et bien sûr toujours valable) : $E(X) = \Sigma x_i p_i$. Il s'agit d'une *valeur "moyenne"* car il arrive fréquemment que l'on vous demande d'en donner une interprétation ... Celle de l'écart-type est donnée par : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

"probabilité d'avoir au moins 1 succès" :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0).$$

"probabilité d'avoir au plus 2 succès" :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

"probabilité d'avoir entre 3 et 20 succès" :

$$P(3 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 2)$$

Attention aux réflexes incontrôlables car il n'est pas toujours judicieux de passer par l'évènement contraire.
À vous de voir ... **RÉFLÉCHISSEZ et adaptez-vous ! ! !** ↻ .

Si par exemple, $n = 8$ et que l'on demande de calculer $p(X \geq 7)$ alors on évalue $p(X = 7) + p(X = 8)$ bien évidemment car dans ce cas, le sens direct est le plus judicieux.

Ne négligez pas les bienfaits dans ce cas de la calculatrice qui peut même s'avérer inévitable dans certains cas (il faut le reconnaître ! :-() comme en Nouvelle-Calédonie en Novembre 2014 où il s'agissait de calculer avec $P(X \leq 11)$ avec $X \hookrightarrow B(2000 : 0,03)$.

♣ Dernière variante classique : elle consiste à vous demander de déterminer la valeur du paramètre n à partir de laquelle un certain évènement va se produire presque à coup sûr, c'est-à-dire avec une probabilité très proche de 1.

Typiquement, déterminer n pour que la probabilité "d'avoir au moins 1 succès soit supérieure ou égale à $0,999$. "

Admettons que p (qui sera connue bien sûr) soit égale à $0,4$. On est alors amenés à résoudre :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) \geq 0,999 &\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,999 \\
&\Leftrightarrow 1 - (0,6)^n \geq 0,999 \\
&\Leftrightarrow 1 - 0,999 \geq (0,6)^n \\
&\Leftrightarrow \ln(0,001) \geq \ln((0,6)^n) \\
\text{car la fonction ln est strictement croissante sur}]0\,;\,+\infty[. &\Leftrightarrow \ln(0,001) \geq n\ln(0,6) \\
&\Leftrightarrow \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \leq n \\
\text{car } \ln(0,6) < 0 \text{ puisque } 0 < 0,6 < 1.
\end{aligned}$$

C'est enfin le grand retour des lois continues ; trois d'entre-elles sont au programme, voire en sont la fierté ... ! :-)

Pourquoi ces lois qui vous font tant souffrir s'imposent-elles ?

Outre le fait que le cadre d'application de Bernoulli est suffisamment idyllique pour sembler artificiel, lorsqu'une variable aléatoire décrit par exemple une durée de vie, il faut être en mesure de lui associer un modèle plus souple que celui préconisé par la loi binomiale qui évolue dans un monde discret, donc très rigide, au sens où X n'est autorisé qu'à prendre des valeurs isolées car entières.
Or, la durée de vie d'un composant électronique par exemple n'est pas nécessairement d'un, deux ou trois ans. Elle peut être de 2 ans, 4 mois et 5

jours. Il faut alors se tourner vers des modèles qui parcourent continûment des intervalles de $\mathbb{R}$ et c'est donc assez naturellement qu'une probabilité est vue comme une aire ...

À l'origine de ces lois, il y a une notion, celle de *densité de probabilités.*

Genre ? On ne l'a pas vue ... ; mais si, vous ne l'avez juste pas vue passer et pourtant il n'est pas exclu que dans un QCM par exemple, on vous demande si telle ou telle fonction est une densité de probabilité sur un intervalle donné.

Aussi, je vous rappelle que l'on dit d'une fonction f qu'elle est une densité de probabilité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ *si et seulement si* :

1. f est **continue** sur I,
2. f **positive** sur I,
3. et enfin que $\int_I f(x)dx = 1$. (ce qui signifie que l'aire "sous la courbe" associée à la fonction f représente la probabilité de l'univers Ω).

Principe : "À CHAQUE LOI, SA DENSITÉ" donc sa représentation graphique et donc la possibilité de visualiser l'aire qui représente la probabilité de l'évenèment considéré.

♠ **Loi Uniforme** :

La fonction densité de probabilité associée est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } \ x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi définie, f est une densité de proba. sur l'intervalle $I = [a;b]$.

La représentation graphique de f restreinte à I est donc un segment de la droite horizontale d'équation $y = \dfrac{1}{b-a}$. Ainsi :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

(c'est l'aire du rectangle correspondant tout simplement)

Dans ce cas, l'espérance $E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \dfrac{a+b}{2}$. Il faut savoir "redémontrer" cette formule !

♠ **Loi de Paramètre** $\lambda > 0$.

La fonction densité est définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi définie, f est une densité de proba. sur $\mathbb{R}^+$.

En particulier, $\lambda = f(0)$ ce qui peut vous permettre une lecture graphique du paramètre au besoin.

▲ Quelques caractéristiques (à savoir démontrer) :

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq t) &= 1 - P(X \leq t) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

(faire un dessin !)

$$\boxed{p(a \leq X \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}.}$$

Un classique :

$$P(X \leq t) = P(X \geq t) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \text{"}demie - vie\text{"})$$

Enfin et SURTOUT, la loi exponentielle est une loi "SANS MÉMOIRE", encore appelée loi "SANS VIEILLISSEMENT", ce qui signifie que :

Pour tous réels positifs t et h :

$$\boxed{P_{x \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)}$$

Il s'agit là encore d'une question ROC donc ne négligez pas de relire la preuve (très courte en plus).

Pour tous réels positifs t et h :

$$\begin{aligned}
P_{X\geq t}(X\geq t+h) &= \frac{P\left[(X\geq t)\cap(X\geq t+h)\right]}{P(X\geq t)}\\
&= \frac{P(X\geq t+h)}{P(X\geq t)}\\
&= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}\\
&= \frac{e^{-\lambda t}\times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}\\
&= e^{-\lambda h}\\
&= P(X\geq h)
\end{aligned}$$

▲ Dans ce cas, l'espérance est donnée par : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Vous donner l'espérance peut donc vous permettre de déterminer la valeur du paramètre $\lambda > 0$.

♠ Loi Normale Centrée Réduite $\mathcal{N}(0,1)$ (loi étalon)

La fonction densité f de probabilité associée est :

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La courbe associée est traditonnellement appelée "courbe en cloche" à cause de son allure, voire "gaussienne". Elle admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie. En effet, la fonction f est PAIRE.

C'est une fonction dont il est facile d'étudier les variations mais pas de calculer l'intégrale si bien qu'il faudra pour les calculs de probas. s'en remettre à la technologie de la calculatrice ou aux extraits de tables de valeurs.

Recommandation : Il existe une question ROC relative à la loi normale centrée réduite faisant en particulier intervenir le TVI dans un contexte moins classique que d'habitude ; cette dernière est traitée de manière très progressive dans le sujet de Nouvelle-Calédonie 2014 (exercice 2).
Faites-le, c'est un conseil qui tend vers un ordre !!

♠ Loi Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

La fonction densité f de probabilité associée est :

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Graphiquement, la courbe associée a encore la forme de courbe en cloche bien entendu (translaté de la gaussienne associée à la loi centrée) d'axe de symétrie donc la droite d'équation $x = \mu$; on peut retenir que

♠ ATTENTION aux petits pièges, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(46; 121)$ alors $\mu = 46$ et $\sigma = 11$ pas 121 !

Enfin, on se ramène à la loi normale "star" ou loi étalon qui est la normale centrée en posant le changement de variable : $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Ainsi,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \Leftrightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$$

Au tout début de la réforme, on était assez frileux et les exercices étaient plutôt très guidés ; depuis l'an dernier, on s'est un peu enhardis disons et on vous laisse de plus en plus fréquemment prendre l'initiative de "recentrer." Pensez-y donc notamment lorsque vous êtes à la recherche d'un écart-type !

♡ La mémoire (la vôtre ou celle de votre alliée la calculatrice) est très sollicitée dans ce chapitre décidément très artificiel : en effet il faudrait idéalement retenir les trois cas particuliers suivants (règle des "1,2,3 sigma" et non pas "soleil" de votre enfance) :

$\boxed{P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,683}$

$\boxed{P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954}$

$\boxed{P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,997}$

Pondichéry est un inconditionnel de ce résultat apparemment ...

♣ Un résultat très difficile : le théorème de ***de Moivre-Laplace***.

Énoncé :

Si $n \geq 30, np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, on estime que les conditions d'application du théorème sont satisfaites.

On peut alors affirmer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ alors la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est approximable par une loi normale centrée réduite.*Sachez interpréter les énoncés : si l'on a sait par exemple que $p(X < 6) = 0,5$, on peut en déduire que l'espérance μ est égale à 6.*

Enfin, on se ramène à la loi normale "star" ou loi étalon qui est la normale centrée en posant le changement de variable : $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

Ainsi,

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2) \Leftrightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$$

Au tout début de la réforme, on était assez frileux et les exercices étaient plutôt très guidés ; depuis l'an dernier, on s'est un peu enhardis disons et on vous laisse de plus en plus fréquemment prendre l'initiative de "recentrer." Pensez-y donc notamment lorsque vous êtes à la recherche d'un écart-type !

♡ *La mémoire (la vôtre ou celle de votre alliée la calculatrice) est très sollicitée dans ce chapitre décidément très artificiel : en effet il faudrait idéalement retenir les trois cas particuliers suivants (règle des "1,2,3 sigma" et non pas "soleil" de votre enfance) :*

$$\boxed{P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = 0,683}$$
$$\boxed{P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) = 0,954}$$
$$\boxed{P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) = 0,997}$$

Pondichéry est un inconditionnel de ce résultat apparemment ...

♣ *Un résultat très difficile : le théorème de **de Moivre-Laplace**.*

Énoncé :

Si $n \geq 30, np \geq 5$ *et* $n(1-p) \geq 5,$ *on estime que les conditions d'application du théorème sont satisfaites.*
On peut alors affirmer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;p)$ *alors la variable aléatoire* Z *définie par* $Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ *est approximable par une loi normale centrée réduite.*

♣ MISE EN GARDE : Vous devez **impérativement** connaître la définition des fonctions densité car elles ne sont pas systématiquement rappelées dans les énoncés.
Quant au contexte des probabilités continues (rappelez-vous : "$\sum$ est au monde discret ce que $\int$ est au monde continu").

♣ **Intervalles de Fluctuation/Confiance au seuil 95%** :

Mais si on est bien dans un cours de maths ...; les maths peuvent décidément tout, même permettre d'édicter des règles de décision au risque 5% de se tromper !
Ne soyons pas amers et énonçons couragement ces deux intervalles à consommer sans modération donc ...
Par contre, évitez de les confondre s'il vous plaît ...

On suppose connue la proportion théorique p d'un caractère sur une population.
On montre que si l'on étudie un grand nombre d'échatillons de cette population de taille n, (avec n suffisamment grand ...) les fréquences observées du caractère testé se situent dans cet intervalle au risque 5% d'erreur. C'est donc l'intervalle dans lequel les fréquences observées doivent "fluctuer" dans le cas où tout va bien.
Ainsi, si la fréquence obervée sur un échantillon donné n'appartient pas à cet intervalle, alors on rejette l'hypothèse émise toujours au risque 5%; on suspecte alors une fraude, une publicité mensongère etc ...
Bref, on est amnenés à déterminés cet intervalle lorsqu'il s'agit de PRENDRE UNE DÉCISION.

Conditions de validité (à vérifier impérativement au cas, peu probable en France, où l'on vous tendrait un piège) :

1. $n \geq 30$
2. $np \geq 5$
3. $n(1-p) \geq 5$

Énoncé :

$$I_F = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

▶ **Remarque** : Au seuil 90%, il faut remplacer la constante $1,96$ par $1,65$ et par $2,58$ au seuil de 99%.

Amplitude de cet intervalle : $2 \times 1,96 \times \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}}$

On suppose connue la fréquence observée f_{obs} sur un échantillon de taille n. On cherche alors à estimer la proportion p du caractère étudié sur l'ensemble de la population.
C'est typiquement le principe des sondages ; interroger un échantillon de

personnes estimé représentatif et en déduire une tendance générale sur une population.

Conditions de validité :

1. $n \geq 30$
2. $nf_{obs} \geq 5$
3. $n(1 - f_{obs}) \geq 5$

Énoncé :

$$I_C = \left[f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Amplitude de cet intervalle : $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

La longueur de l'intervalle de confiance est d'autant plus petite que n est grand ce qui signifie que plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'incertitude diminue.
C'est une question désormais banale en ES mais qui pourrait s'inviter en S à savoir : "déterminer la taille de l'échantillon pour que l'amplitude soit inférieure ou égale à $0,01$" par exemple.
On résout alors l'inéquation $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,01$.

♠ **Les Nombres Complexes ou la vengeance aux trois visages** :

Vous avez tout d'abord rencontré le visage des nombres complexes qui a en général votre préférence même s'il s'agit finalement du plus pauvre en information à savoir ***le visage algébrique***.

Ainsi, un nombre complexe z est écrit sous forme algébrique lorsque z est sous la forme $x + iy$ avec $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$ (x et y étant deux nombres RÉELS). On rappelle en particulier que la partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel ...

♦ **Cas particuliers** : Lorsque la partie réelle x est nulle, on dit que z est un *imaginaire pur* et lorsque $y = 0$, alors le nombre complexe z est ... un "réel" !
On dispose en particulier de l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Un théorème très naturel mais très important concerne l'égalité entre deux nombres complexes ; ainsi, deux nombres complexes sont égaux **ssi** ils ont *même partie réelle* et *même partie imaginaire*. En d'autres termes :

$$x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$$

♦ Un nombre complexe est NUL **ssi** sa partie réelle et sa partie imaginaire sont simultanément nulles.

Il est tout à fait inutile de mémoriser les régles opératoires usuelles bâties sur les nombres complexes car *elles sont régies par les régles habituelles de distributivité, d'associativité et de commutativité* et, bien entendu, le fait fondamental que $i^2 = -1$.

En revanche, il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$ au sens de la relation d'ordre bien connue dans $\mathbb{R}$.

♣ Un nouveau venu : la notion de nombre CONJUGUÉ.

On appelle **conjugé d'un nombre complexe** $z = x + iy$ et l'on note $\overline{z}$, l'unique nombre complexe défini par $\overline{z} = x - iy$.
L'opération de conjugaison n'ayant d'effet *que* sur la partie imaginaire, elle était en embuscade tant que l'on travaillait dans le monde réel, un nombre réel étant son propre conjugué.

Les propriétés algébriques de la conjugaison sont nombreuses et toutes à l'origine d'éventuelles questions ROC (cf le sujet de Métropole 2014) ainsi $\forall\ z, z' \in \mathbb{C}$ et $\forall \in \mathbb{N}$:

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad ; \quad \overline{\overline{z}} = z$$

► Une remarque bien utile : $z\overline{z} = x^2 + y^2$; c'est cette "propriété" que l'on exploite lorsque l'on multiple par l'expression conjuguée dans le but d'obtenir la forme algébrique d'un nombre complexe.

♣ Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

▲ Luttez contre cet irrépressible réflexe qui consiste à revenir à la forme algébrique ; cette méthode, qui conduit à la résolution d'un systéme, est lourde et souvent inutile.
Elle serait tout à fait déplacée par exemple dans la résolution de $\dfrac{z+2}{z-2} = i$.

▲ Dans l'ensemble (pour ne pas dire "corps") des nombres complexes, **le théorème du produit nul** (qui n'est donc pas un dû ..) est encore vrai ainsi

$$Z \times Z' = 0 \Leftrightarrow Z = 0 \text{ ou } Z' = 0.$$

Le vocabulaire est hors programme en terminale S mais certains d'entre vous se sont vus présenter cette propriété très forte et très utile comme une propriété d'intégrité de $\mathbb{C}$.

▲ On motive souvent l'introduction des nombres complexes par le défaut de la structure de $\mathbb{R}$ qui ne permet pas de décrire les solutions d'une équations de degré 2 à **coefficients réels** dont le **discriminant est strictement négatif**.

$\mathbb{C}$ va venir combler cette lacune.

Ainsi pour (E) : $aZ^2 + bZ + c = 0$ avec $\triangle < 0$, on a deux solutions **complexes conjuguées** :

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\triangle}}{2a} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\triangle}}{2a}$$

où $= b^2 - 4ac$.

Les variantes rencontrées autour du second degré sont similaires à celles vues en 1S avec divers changements de variables possibles (le plus fréquent étant bien entendu $Z = z^2$ dans le cas d'une équation bicarrée).

Lorsqu'une équation contient z et $\overline{z}$ (par exemple : $(3+2i)z+6i = 10-i\overline{z}$) alors il faut se résigner à poser $z = x + iy$.

Dernier grand classique : la méthode d'identification des coefficients dans le cas d'un polynôme de degré 3 à coefficients réels ou pas. (voir par exemple

Nouvelle Calédonie Mars 2012.

♠ Le temps est venu de voir les complexes sous un autre jour via **leur visage trigonométrique** qui nécessite l'introduction des notions de **module** et **d'argument**.

La force des nombres complexes résident dans leur don d'ubiquité : "entre algébre et géométrie " ; ainsi à un nombre complexe $z = x + iy$, on sait associer de manière unique un point du plan rapporté à un repère orthonormé rebaptisé pour l'occasion $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de coordonnées cartésiennes $(x; y)$.

On dira qu'un point M du plan complexe a pour **affixe** le nombre complexe z_M.

Par extension et en s'inspirant de la géométrie cartésienne, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A.$$

Cas particuliers utiles :

1. Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $\boxed{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$

2. Si maintenant G désigne le centre de gravité d'un triangle ABC, $\boxed{z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}}$

3. Le quadrilatère ABCD est un parallèlogramme $\Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

4. Enfin, z et $\bar{z}$ sont représentés par des points du plan symétriques par raport à l'axe réel (ou axe des abscisses).

Remarque : Dans les exercices, on sera souvent conduit à "identifier" $\mathbb{C}$ et le plan $\mathbb{R}^2$.

♣ La notion de MODULE d'un nombre complexe (*réflexe à conditionner* : "module $\leadsto$ distance ")
Par définition,

$$\begin{aligned} \mid z \mid &= \mid x + iy \mid \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= OM \\ &= \parallel \overrightarrow{OM} \parallel \end{aligned}$$

▶ En particulier : $\mid i \mid= 1$ et $\mid z \mid^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$.

Plus généralement,

$$AB = \mid z_B - z_A \mid$$

♡ **Quelques propriétés algébriques du module**

∼ $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \mid z + z' \mid & \leq & \mid z \mid + \mid z' \mid \\ \mid z \times z' \mid & = & \mid z \mid \times \mid z' \mid \\ \mid (z^n) \mid & = & \mid z \mid^n \\ \mid \bar{z} \mid & = & \mid z \mid \end{array}$$

Remarque : La notation parle d'elle-même et l'on reconnaît les propriétés de la Valeur Absolue vue en première S qui représente quant à elle la distance sur l'axe réel, ie en dimension 1.
Ainsi, le module d'un nombre **réel** coïncide avec **sa valeur absolue** ; PAS BESOIN DE SAVANTS CALCULS DONC ! ! ! !

⋇ **Application à la recherche d'ensembles de points** : les incontournables.

La Consigne : *Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe tels que :*

$$\begin{array}{rcl} \mid z + i \mid = \mid z - 3i \mid & \Leftrightarrow & \mid z - (-i) \mid = \mid z - 3i \mid \\ & \Leftrightarrow & \mid z - z_A \mid = \mid z - z_B \mid \\ & \Leftrightarrow & MA = MB \\ & \Leftrightarrow & M \in (\Delta)\text{médiatrice de}[AB] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mid z - 3i \mid = \mid -1 + 2i \mid & \Leftrightarrow & \mid z - z_\Omega \mid = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} \\ & \Leftrightarrow & \mid z - z_\Omega \mid = \sqrt{5} \\ & \Leftrightarrow & \Omega M \mid = \sqrt{5} \\ & \Leftrightarrow & M \in \mathcal{C}(\Omega; 5) \end{array}$$

♦ Variantes :

$$\begin{aligned} |\ \bar{z}-1+4i\ |=|-i\ | &\Leftrightarrow |\ \overline{z-1-4i}\ |=|-i\ | \\ &\Leftrightarrow |\ z-1-4i\ |=|-i\ | \\ &\Leftrightarrow |\ z-(1+4i)\ |=1 \\ &\Leftrightarrow \Omega M=1 \\ &\Leftrightarrow M\in\mathcal{C}(\Omega;1) \end{aligned}$$

*Idée à avoir : **Étendre** le conjugué pour pouvoir ensuite utiliser que* $|\ \bar{Z}\ |=|\ Z\ |$

$$\begin{aligned} |\ iz-2\ |=|\ \sqrt{3}-i\ | &\Leftrightarrow |\ i(z+2i)\ |=|\ \sqrt{3}-i\ | \\ &\Leftrightarrow |\ i\ |\times|\ (z+2i)\ |=|\ \sqrt{3}-i\ | \\ &\Leftrightarrow |\ z+2i\ |=|\ \sqrt{3}-i\ | \\ &\Leftrightarrow |\ z-(-2i)\ |=2 \end{aligned}$$

Idée à avoir : Mettre "i" (ie ce qui gêne) en facteur de force ...

♣ La notion d'**argument** ou le grand retour des angles orientés. (*réflexe à conditionner* : "argument ⇝ angle orienté")

$$\arg(z)=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$$

Plus généralement,

$$\arg(z_B-z_A)=(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB})$$

Rappel : Comment calculer UN argument ? (outil indispensable : le cercle trigonométrique)

Exemple : *Déterminer un argument du nombre complexe $z=-1-i$.*

- Calcul du module de z : $|-1-i\ |=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$
- Détermination de $\arg(z)=\theta$ modulo 2π.

$$\cos(\theta)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ainsi $\theta = -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

♦ **Cas Particuliers** :

Le nombre complexe NUL est le seul nombre complexe a ne pas posséder d'argument.

Si $z = x$ est un réel strictement positif, $\arg(z) = 0[2\pi]$

Si $z = x$ est un réel strictement négatif, $\arg(z) = \pi[2\pi]$

Si $z = iy$ est un imaginaire pur avec $y > 0$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Si $z = iy$ est un imaginaire pur avec $y < 0$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

♡ **Quelques propriétés des arguments** : ROC

∼ $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} \arg(zz') & = & \arg' z) + \arg(z')[2\pi] \\ \arg(\frac{1}{z}) & = & -\arg(z)[2\pi] \\ \arg(\frac{z}{z'}) & = & \arg(z) - \arg(z')[2\pi] \\ \arg(z^n) & = & n\ \arg(z)[2\pi] \\ \arg(\overline{z}) & = & -\arg(z)[2\pi] \end{array}$$

♡ **U**ne conséquence très utile dans les exercices pour la détermination de la nature d'un triangle :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$$

(Attention, ROC !)

♡ Exemples d'applications :

1. On suppose qu'après calcul, on obtient :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -3.$$

L'interprétation en termes d'argiuments, induit que

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \pi[2\pi]$$

ainsi les points A,B et C sont alignés.

2. On suppose qu'après calcul, on obtient :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i.$$

L'interprétation en termes de modules induit que

$$\frac{AC}{AB} = 1$$

ainsi $AB = AC$ et le triangle ABC est isocèle en A.

L'interprétation en termes d'arguments, induit quant à elle que

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

ainsi le triangle ABC est rectangle en A.

Finalement, ABC est rectangle isocèle en A.

<u>Autre méthode</u> : On utilise la réciproque du théorème de Pythagore après avoir calculé à l'aide des modules les trois distances AB, AC et BC.

3. Si maintenant on montre que :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

alors l'interprétation en termes de module puis d'argument induit que le triangle ABC est <u>équilatéral</u> en tant que triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

<u>Autre méthode</u> : Idem, on évalue les distances et l'on vérifie que $AB = AC = BC$.

Il peut arriver dans un exercice du bac que le chemin proposé pour établir une propriété semble terriblement tortueux et détourné ; la raison en est qu'il s'agit pour l'examinateur de tester le candidat sur le maximum de techniques même si ces dernières semblent aussi légitimes qu'un "marteau-piqueur pour déterrer un fraisier" ! ;-) Restons groupés ...

♡ : *Quelques Caractérisations bien utiles*

$$\begin{aligned} z = x + iy \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow Im(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ &\Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = x + iy \in i\mathbb{R}^* &\Leftrightarrow Re(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \\ &\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi] \end{aligned}$$

On dispose désormais des outils *nécessaires et suffisants* pour présenter les deux autres visages des nombres complexes :

1. **La forme trigonométrique** : $\boxed{z = \mid z \mid \times (\cos\theta + i\sin\theta)}$
2. **La forme exponentielle** : $\boxed{z = \mid z \mid \times e^{i\theta}}$

Cette dernière écriture est non seulement plus *compacte* mais aussi plus efficace car l'exponentielle complexe dispose des **mêmes propriétés algébriques** que l'exponentielle réelle, autrement dit celles des puissances de 10 moralement vues au collège.
On rappelle malgré tout que $\forall\, \theta, \theta'$ et pour tout n entier naturel :

$$\boxed{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad ; \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

Il faut bien entendu savoir passer d'un visage à l'autre et interpréter chacun d'entre-eux.

Ainsi, si l'on sait que $z_A = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ alors on doit comprendre que :

$$\mid z_A \mid = 2 \Leftrightarrow OA = 2$$

et que :

$$\arg(z_A) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{2\pi}{3}[2\pi].$$

Placer A à la règle et au compas (intersection cercle de centre O et de rayon 2/ demi-droite) devient alors facile et précis !

~ REVOIR LES ÉQUATIONS DE CERCLES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES DE DROITES ~

♦ **Quelques Cas Particuliers** :

$$e^{i0} = 1 \quad ; \quad e^{i\pi} = -1 \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad ; \quad e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

♠ **Un Contexte Fréquent au BAC**

En terminale S, on ne fait pas d'analyse complexe, c'est-à-dire que l'on n'étudie pas de fonctions d'une variable complexe comme on le fait de façon systématique avec les fonctions d'une variable réelle (via la notion de dérivation notamment) et pourtant on souhaite travailler avec des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

La parade consiste donc à identifier $\mathbb{C}$ au plan $\mathcal{P}$; on dispose ainsi d'une application :

$$f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M(z) \mapsto M'(z')$$

Les antécédents et les images sont donc des élèments du plan, c'est-à-dire des points et bien entendu l'affixe z' du point image M' dépend de l'affixe z du point antécédent M. Par exemple, $z' = \dfrac{i(z-2)}{z+1}$ si $z \neq -1$.

Les questions naturelles sont alors : la détermination**d'images**, la recherche **d'antécédents** et enfin **la recherche d'éventuels points laissés INVARIANTS** par l'application f, c'est -à-dire des points tels *M et M' soient confondus* (ce qui revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = z$).

★ **Nostalgie- Nostalgie** : *Avant* 2012, *étaient au programme les descriptions complexes de certaines transformations géométriques simples telles que les translations, les homothéties et les rotations. Malheureusement, ces cas particuliers qui permettaient de concrétiser le contexte abstrait évoqué ci-dessus sont désormais hors-programme.*

★ Il n'est pas impossible le jour du bac que vous soyez confrontés à un exercice mêlant suites et nombres complexes. C'était d'ailleurs un couple très en vogue lors de la session 2014. Le cas échéant, on vous fait en général travailler avec une suite de modules (a priori de nature géométrique), c'est à dire une suite de nombres **réels** (positifs) donc ne vous laissez pas déstabilisés par le contexte car vous êtes en terrain connu.

★ Vous n'avez a priori pas le droit de généraliser à $\mathbb{C}$ ce que vous savez dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si vous exhibez une relation de la forme $u_{n+1} = \frac{1}{2}iu_n$, évitez, même si cela est tentant (et finalement raisonnable), d'affirmer que la suite u est géométrique de raison complexe $q = \frac{1}{2}i$ pour un déduire l'expression de u_n en fonction de n en généralisant le résultat bien connu pour les suites à valeurs réelles.
Si l'on vous donne la réponse (c'est presque toujours le cas), passez par un raisonnement par récurrence, moins sujet à caution (cf par exemple Liban 2016).

♠ Géométrie Analytique dans l'Espace : quelques méthodes incontournables :

"Analytique" car vous serez rapidement placés dans un repère orthonormé ; en particulier, que les élèves qui ne voient pas l'espace (car ce n'est pas si facile), ne s'inquiètent pas trop. Vous pouvez être mis en difficultés sur une question ou deux où il s'agit de constructions géométriques pures mais guère davantage.
En revanche, prenez bien en compte le repère (parfois original) que l'on vous impose. *Se tromper dans la lecture des coordonnées au départ serait une catastrophe surtout lors d'une épreuve en temps limité.*

♣ A et B deux points de l'espace ; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordoonnées :

$$(x_B - x_A \; ; \; y_B - y_A \; ; \; z_B - z_A)$$

♠ Soit i le milieu du segment $[AB]$ alors I a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

♣ La distance $AB = \| \overrightarrow{AB} \|$ est donnée par :

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

♠ Pour montrer que trois points A, B et C **forment un plan**, on peut montrer que :
soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ne sont pas colinéaires** en vérifiant que leurs triplets de coordonnés ne sont pas proportionnels
ou bien en prouvant que l'angle $B\hat{A}C$ par exemple n'est ni nul ni plat.

♣ Pour montrer que trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires, il faut et il suffit de prouver qu'il existe un couple $(\alpha; \beta)$ de réels tels que : $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.
Lorsque l'on explicite cette relation, on obtient une équation paramétrique du plan.

De la même façon, 4 points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

♠ On rappelle :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\theta)$$

♣ Pour montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ **est normal à un plan (ABC)**, on vérifie que :

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

ET

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Ce critère est une traduction analytique du théorème géométrique selon lequel *une droite est orthogonale à un plan ssi elle l'est à deux droites sécantes du plan.*
Cela permet en particulier de trouver le début d'une équation cartésienne du plan (ABC) !

♠ Deux plans sont **confondus** ssi leurs équations sont **proportionnelle**s.

♣ Deux plans sont **parallèles** ssi leurs vecteurs normaux sont **colinéaires**. Si de plus, ils sont un point en commun, alors ils sont confondus.

♠ Dans le cas contraire, ils (les plans) sont **sécants suivant une droite** dont on peut trouver une équation paramétrique en "résolvant" le **système "2 équations, 3 inconnues"** formé de deux équations de plans soit un système DEUX équations, TROIS inconnues. La méthode consiste alors à fixer l'une des variables (peu importe laquelle) qui jouera le rôle du paramètre réel.

♣ Deux plans sont **orthogonaux** ssi **leurs vecteurs normaux sont orthogonaux** (càd ssi leur produit scalaire est nul).

♠ Une droite de l'espace est représentée soit comme l'intersection de deux plans sécants (système deux équations, trois inconnues) soit par une équation paramétrique. Pour en bâtir une, il suffit de connaître **un point** de la droite et **un vecteur directeur** de celle-ci.

♣ À l'inverse, lorsque l'on dispose d'une équation paramétrique de droite, on peut **déduire un vecteur directeur** cette dernière et les coordonnées d'autant de points de la droite que l'on souhaite. Il suffit de donner une valeur concrète au paramètre t.

Exemple : Dire que la droite (D) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x & = & -2+t \\ y & = & -t \\ z & = & -1-t \end{cases}$$

signifie qu'elle passe par le point $A(-2;0;-1)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;-1;-1)$. Puisqu'il y a une infinité de points sur une droite et que tous les vecteurs colinéaires à sont autant de vecteurs directeurs de (D), il N'y a PAS unicité de la représentation paramétrique. On peut en partciulier vous proposer une équation paramétrique de droite qui n'est pas celle à laquelle vous pensiez donc en cas de "Vrai/Faux", soyez vigilants.

♠ Deux droites sont **coplanaire**s ssi elles sont comparables, c'est-à-dire ssi elles sont **parallèles** (vecteurs directeurs colinéaires) ou bien **sécantes**. Penser, s'il faut former le système constitué de deux équations paramétriques, à nommer différemment les paramètres réels (t et t' par exemple) pour éviter les confusions !

• Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonales ssi** les vecteurs directeurs sont orthogonaux, ie si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

• Deux droites sont **perpendiculaires** ssi elles sont orthogonales ET coplanaires.

♣ On appelle **plan médiateur d'un segment [AB]** l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA = MB$.
Pour en trouver une équation, on utilise la relation

$$\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

où I désigne le milieu de [AB].
Elle est à rapprocher de la relation utilisée en première S pour trouver une équation cartésienne de médiatrice.

♠ Une équation de plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$: en particulier, $2x + 3y = 0$ est une équation de plan, tout comme $x = 3$ ou $y - 4 = 0$!!!! On est dans l'ESPACE, attention. Pensez que dans l'espace, l'ensemble d'équation $y = 2$ est un plan parallèle à une face, PAS UNE DROITE HORIZONTALE.

♣ On dispose d'une autre représentation d'un plan de l'espace ; il s'agit de la représentation paramétrique (elle n'est pas unique). il nécessite de connaître un point A du plan et deux vecteurs non-colinéaires de ce dernier : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, autrement dit "une base" du plan.
On traduit alors que M est un point du plan si et seulement si :

$$\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}.$$

Exemple :

$$\begin{cases} x = -2+t+2t' \\ y = -t-2t' \\ z = -1-t+3t' \end{cases}$$

est UNE représentation paramétrique d'un plan P de l'espace. Elle induit que le point $(-2;0;-1)$ est un point de P et qu'uen base de ce plan est constitué du couple de vecteurs non-colinéaires $\overrightarrow{u}(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{v}(2;-2;3)$.

♠ Pour étudier l'intersection entre une droite et un plan, on forme le système constitué d'une équation de plan et d'une équation paramétrique de la droite. Si l'on trouve une unique valeur de t, alors l'intersection est réduite à un point.
Si tous les "t" réels fonctionnent, la droite est incluse dans le plan.
Si le système est incompatible pour toute valeur de t, la droite et le plan sont strictement parallèles.

♠ Pour montrer qu'un point H est le **projeté orthogonal** d'un point D sur un plan (ABC), on doit vérifier que : H appartient à (ABC) ET que le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à un vecteur normal au plan.
On peut alors en déduire la distance d'un point de l'espace à un plan (sous entendu, la "plus courte". Ainsi, si l'on désigne par H le projeté orthongonal d'un point A de l'espace sur un plan $(\mathcal{P})$, alors :

$$d(A;(\mathcal{P}) = AH.$$

♣ Une équation de la sphère de centre $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon R>0 est de la forme :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$$

♠ On peut déterminer une équation de la sphère de diamètre $[AB]$ en utilisant qu'un point M de l'espace appartient à celle-ci ssi :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$

♣ On peut chercher l'intersection sphère/ droite en formant le système associé (on tombe alors sur une équation du second degré en t). On peut trouver qu'elle est constituée de deux points, d'un point unique ou encore qu'elle est vide.

♠ Révisez les volumes usuels (on ne sait jamais) ainsi que l'énoncé du théorème du toit. Par exemple, on demande dans Pondichéry 2015 le volume d'un tétraèdre ...

C'est un chapitre de GEOMÉTRIE donc n'hésitez pas à faire des dessins pour vous aider.

Ce bilan, qui vous paraît peut-être interminable, n'est pourtant qu'un pâle survol de l'année de terminale S ; appropriez-vous ces pages, annotez-les, complétez-les (avec un arbre pondéré-type, l'énoncé de la loi des probabilités totales, un cercle trigonométrique etc ..., voire corrigez-les car des erreurs (ne serait-ce que de frappe) ont dû s'y glisser.

$$e^{\text{Bonne Chance}}$$

Le mot (maux ?) de la fin à A. Lincoln :

"*Si vous trouvez que l'éducation coûte cher, essayez l'ignorance.*"